Forschungsschwerpunkte – Professorin Dr. Lisa Sauermann

Mein Forschungsgebiet heißt Probabilistische und Extremale Kombinatorik. In der Kombinatorik geht es um „diskrete“ mathematische Objekte wie endliche Mengen oder Punkte in der Ebene – im Gegensatz zu „kontinuierlichen“ Objekten wie Kurven oder die reelle Zahlenachse. Das Teilgebiet der Extremalen Kombinatorik befasst sich mit Fragestellungen, in denen es um die maximal oder minimal mögliche Anzahl solcher kombinatorischer Objekte unter gewissen Bedingungen geht. Ein konkretes Beispiel ist hier ein fast 80 Jahre altes Problem des berühmten Mathematikers Paul Erdős, das immer noch ungelöst ist: Was ist die maximal mögliche Anzahl von Punktepaaren unter n Punkten in der Ebene, deren Abstand genau 1 beträgt? Anders formuliert: Wenn man n Punkte in der Ebene beliebig platzieren darf und erreichen möchte, dass möglichst viele Strecken zwischen zwei der Punkte genau die Länge 1 haben, wie viele solche Strecken der Länge 1 kann man bilden? Hier geht es darum, die maximal mögliche solche Anzahl bei diesem geometrischen Problem zu bestimmen. Natürlich geht es nicht bei allen Problemen der Extremalen Kombinatorik um geometrische Sachverhalte, oft geht es beispielsweise auch um Mengen, Folgen oder sogenannte Graphen.

Bei vielen solchen extremalen Fragestellungen spielen Methoden aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, also sogenannte probabilistische Methoden eine wichtige Rolle. Es gibt auch kombinatorische Fragestellungen, bei denen der Zufall schon Teil der Fragestellung selbst ist, zum Beispiel bei der Untersuchung von „Zufalls-Graphen“ oder „Zufalls-Matritzen“. Durch die enge Verflechtung werden Probabilistische Kombinatorik und Extremale Kombinatorik oft als ein gemeinsames Gebiet angesehen. Ich finde es sehr spannend, Methoden aus verschiedenen mathematischen Gebieten, wie Wahrscheinlichkeitstheorie und Kombinatorik, zu verknüpfen. Bei einem Teil meiner Forschungsarbeiten nutze ich auch noch Algebra, insbesondere polynomielle Methoden, also Methoden, die auf der Verwendung von Polynomen beruhen.

Besonders interessiert mich die sogenannte Slice Rank Polynomial Method (auf Deutsch könnte das mit „Scheibchen-Rang-Polynom-Methode“ übersetzt werden). Diese Methode wurde vor einigen Jahren von Terence Tao gefunden, basierend auf Arbeiten von Croot–Lev–Pach und Ellenberg–Gijswijt. Sie hat zu spektakulären Ergebnissen bei verschiedenen Problemen in Extremaler Kombinatorik und Additiver Zahlentheorie geführt, mit fundamentalen Verbesserungen der bekannten Schranken bei diesen Problemen. Leider ist die „Slice Rank Polynomial Method“ aber ziemlich unflexibel: Wenn man sie anwenden kann, führt sie meist zu sehr guten Schranken, ist aber leider sehr restriktiv und oft schon nach einer kleinen Variation des Problems nicht mehr anwendbar. In mehreren meiner Arbeiten kombiniere ich die „Slice Rank Polynomial Method“ mit anderen Argumenten, um sie flexibler und breiter anwendbar zu machen.

Beispielsweise habe ich gemeinsam mit Dmitrii Zakharov mittels der „Slice Rank Polynomial Method“ in Kombination mit probabilistischen Methoden und Werkzeugen aus der Additiven Zahlentheorie die Schranken beim sogenannten Erdős–Ginzburg–Ziv Problem in hoher Dimension verbessert. Dies ist ein klassisches extremales Problem, das sich wie folgt formulieren lässt: Für gegebene positive ganze Zahlen m und n, was ist die kleinstmögliche Zahl s, sodass sich unter s Punkten in einem n-dimensionalen Gitter immer m Punkte auswählen lassen, deren Schwerpunkt wieder ein Gitterpunkt ist? Mit einem n-dimensionalen Gitter ist hier eine n-dimensionale Verallgemeinerung eines zweidimensionalen Schachbrettgitters gemeint (formal sind die Gitterpunkte in diesem n-dimensionalen Gitter Vektoren der Länge n mit ganzzahligen Einträgen). Für einen bestimmten Parameterbereich für m und n (nämlich, wenn n sehr viel größer als m ist), haben Dmitrii Zakharov und ich eine deutliche Verbesserung der oberen Schranken für s für dieses Problem erzielt.

Ein anderes Thema, für das ich mich sehr interessiere, ist Antikonzentration diskreter Zufallsvariablen. Das Konzentrationsverhalten vieler Klassen von Zufallsvariablen spielt eine fundamentale Rolle in Probabilistischer Kombinatorik und in Wahrscheinlichkeitstheorie. Dabei geht es darum, dass sich viele Zufallsvariablen, beispielsweise die Anzahl der Sechsen bei n Würfen eines Spielwürfels, mit hoher Wahrscheinlichkeit in einem relativ kleinen Intervall bewegen. Im Beispiel mit den Würfeln hat dieses Intervall nur ungefähr die Länge $\sqrt{n}$, obwohl ja jede Anzahl von 0 bis zu n Sechsen möglich ist. Bei Antikonzentration geht es um ein umgekehrtes Phänomen: Die Zufallsvariable nimmt keinen bestimmten Wert mit besonders hoher Wahrscheinlichkeit an. Beispielsweise ist bei den Sechser-Würfen für jede Zahl die Wahrscheinlichkeit höchstens ungefähr $1/\sqrt{n}$, dass genau diese Zahl als Anzahl der Sechsen bei n Würfelwurfen auftritt. Das ist natürlich nur ein einfaches Beispiel, aber das Antikonzentrationsverhalten kann man für viele interessante diskrete Zufallsvariablen untersuchen.

Gemeinsam mit Matthew Kwan erforsche ich Antikonzentration von quadratischen Polynomen in $\{0,1\}$-Zufallsvariablen. Eine unserer Arbeiten zu diesem Thema beschäftigt sich auch mit Anwendungen zu sogenannten Ramsey-Graphen. Dies sind kombinatorische Objekte, deren Existenz man mit probabilistischen Methoden zeigen kann, aber für die keine expliziten Konstruktionen bekannt sind. In einer gemeinsamen Arbeit mit Matthew Kwan, Ashwin Sah und

Mehtaab Sawhney haben wir mittels der Untersuchung von Antikonzentration eine 30 Jahre alte Vermutung von Paul Erdős und Brendan McKay über Ramsey-Graphen bewiesen.

Gemeinsam mit Noga Alon und Matija Bucić habe ich auch an einer Variante des oben beschriebenen Problems von Paul Erdős zu Einheitsabständen von Punktmengen in der Ebene geforscht. Anstatt der üblichen Definition des Abstands zweier Punkte kann man auch andere Abstandsfunktionen betrachten, die durch sogenannte Normen beschrieben werden. Die normale Abstandsdefinition ergibt sich dann durch Betrachtung der sogenannten L2-Norm. Wir haben für fast alle Normen in der Ebene obere und untere Schranken für dieses Problem bewiesen, die so nahe beieinander liegen, dass sie das Problem für fast alle Normen nahezu vollständig beantworten.

Wir haben auch ähnliche Resultate im 3-dimensionalen Raum, und allgemeiner im d-dimensionalen Raum für jede gegebene Zahl d, gezeigt – und je größer d, desto näher liegen unsere oberen und unteren Schranken beieinander. Leider gelten unsere Resultate nur für „fast alle“ Normen, und insbesondere nicht für die normale Abstandsdefinition im ursprünglichen Problem von Paul Erdős von 1946. Aus unserem Beweis ergibt sich auch kein explizites Beispiel einer Norm oder Abstandsdefinition, für die unsere Schranken gelten. Dieses Phänomen tritt auch bei probabilistischen Beweisen häufig auf (beispielsweise bei den oben erwähnten „Ramsey-Graphen“): Man weiß, dass fast alle Objekte in einer gewissen Grundmenge eine bestimmte Eigenschaft erfüllen, kann aber kein konkretes Beispiel eines Objekts mit der Eigenschaft angeben.

Es begeistert mich, durch eine Kombination von Methoden aus verschiedenen mathematischen Gebieten, wie Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Algebra, Fortschritt bei alten und neuen kombinatorischen Forschungsproblemen zu erzielen. Dabei ergeben sich teilweise auch Weiterentwicklungen oder neue Verbindungen der Methoden, die dann auch für andere Probleme hilfreich sein können.